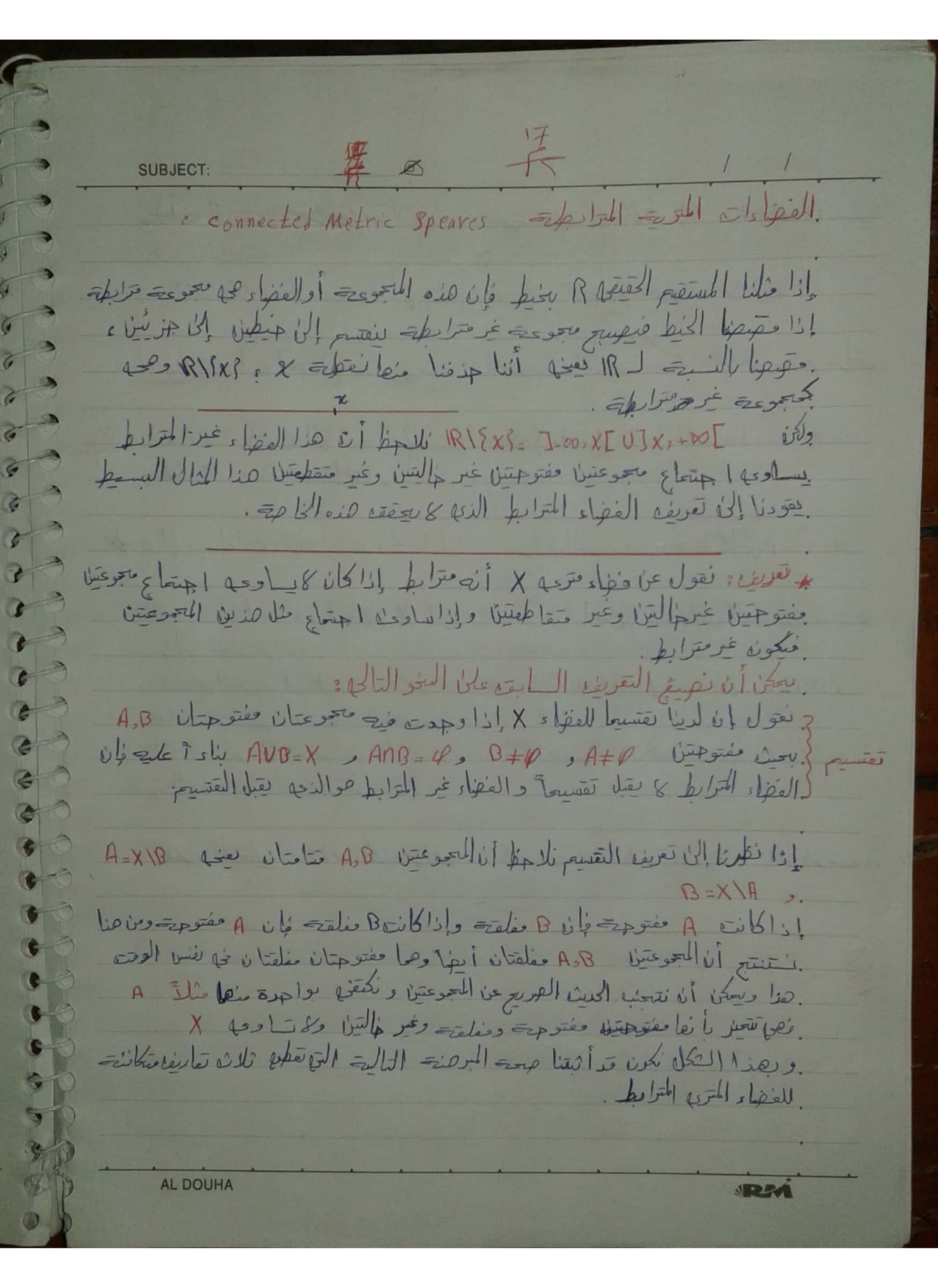


SUBJECT: 17

الفضاءات المترية المترابطة Connected Metric Speares :

إذا مثلنا المستقيم الحقيقي R بخيط فإن هذه المجموعة أو الفضاء هي مجموعة مترابطة إذا قصصنا الخيط فيصبح مجموعة غير مترابطة ينقسم إلى خيطين إلى جزئين ، قصصنا بالنسبة لـ $\mathbb{R}$ يعني أننا حذفنا منها نقطة x ، $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ وهي مجموعة غير مترابطة .

ولكن $\mathbb{R}\setminus\{x\} =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ نلاحظ أن هذا الفضاء غير المترابط يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين هذا المثال البسيط يقودنا إلى تعريف الفضاء المترابط الذي لا يحقق هذه الخاصة .

★ **تعريف :** نقول عن فضاء متري X أنه مترابط إذا كان لا يساوي اجتماع مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين وإذا ساوى اجتماع مثل هذين المجموعتين فيكون غير مترابط .

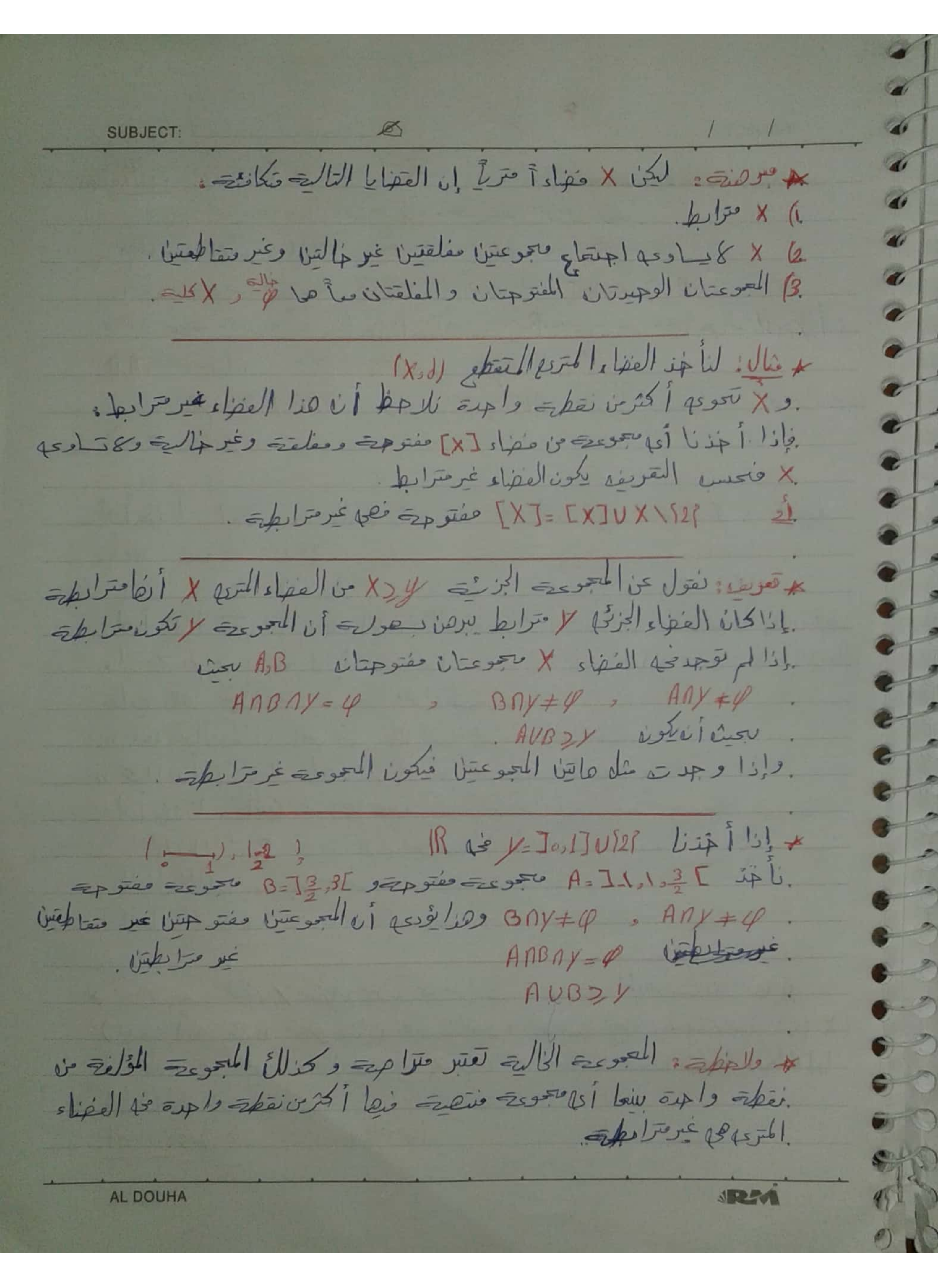
يمكن أن نصيغ التعريف السابق على النحو التالي :

تقسيم: نقول إن لدينا تقسيما للفضاء X إذا وجدت فيه مجموعتان مفتوحتان A, B بحيث مفتوحتين $A \neq \varphi$ و $B \neq \varphi$ و $A \cap B = \varphi$ ، $A \cup B = X$ بناءً عليه فإن الفضاء المترابط لا يقبل تقسيماً والفضاء غير المترابط هو الذي يقبل التقسيم .

إذا نظرنا إلى تعريف التقسيم نلاحظ أن المجموعتين A, B متتامتان يعني $A = X\setminus B$ و $B = X\setminus A$.

إذا كانت A مفتوحة فإن B مغلقة وإذا كانت B مغلقة فإن A مفتوحة ومن هنا نستنتج أن المجموعتين A, B مغلقتان أيضاً وهما مفتوحتان مغلقتان في نفس الوقت هذا ويمكن أن نتجنب الحديث الصريح عن المجموعتين ونكتفي بواحدة منها مثلاً A فهي تتميز بأنها ~~مفتوحتين~~ مفتوحة ومغلقة وغير خالية ولا تساوي X

وبهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية التي تعطي ثلاث تعاريف متكافئة للفضاء المتري المترابط .



SUBJECT: / /

★ مبرهنة: ليكن X فضاءاً مترياً. إن القضايا التالية متكافئة:

1) X مترابط.

2) X لا يساويه اجتماع مجموعتين مغلقتين غير خاليتين وغير متقاطعتين.

3) المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان معاً هما φ خالية و X كلية.

★ مثال: لنأخذ الفضاء المتري المتقطع (X,d) و X تحوي أكثر من نقطة واحدة نلاحظ أن هذا الفضاء غير مترابط، فإذا أخذنا أي مجموعة من فضاء $[X]$ مفتوحة ومغلقة وغير خالية ولا تساوي X فحسب التعريف يكون الفضاء غير مترابط.

أي $[X] = [X] \cup X \setminus \{2\}$ مفتوحة فهي غير مترابطة.

★ تعريف: نقول عن المجموعة الجزئية $X \supseteq Y$ من الفضاء المتري X أنها مترابطة إذا كان الفضاء الجزئي Y مترابط. يبرهن بسهولة أن المجموعة Y تكون مترابطة إذا لم توجد في الفضاء X مجموعتان مفتوحتان A,B بحيث

$A \cap Y \neq \varphi$ ، $B \cap Y \neq \varphi$ ، $A \cap B \cap Y = \varphi$

بحيث أن يكون $A \cup B \supseteq Y$.

وإذا وجدت مثل هاتين المجموعتين فيكون المجموعة غير مترابطة.

★ إذا أخذنا $Y =]0,1] \cup \{2\}$ في $\mathbb{R}$ ( ] ، 1 ، 2)

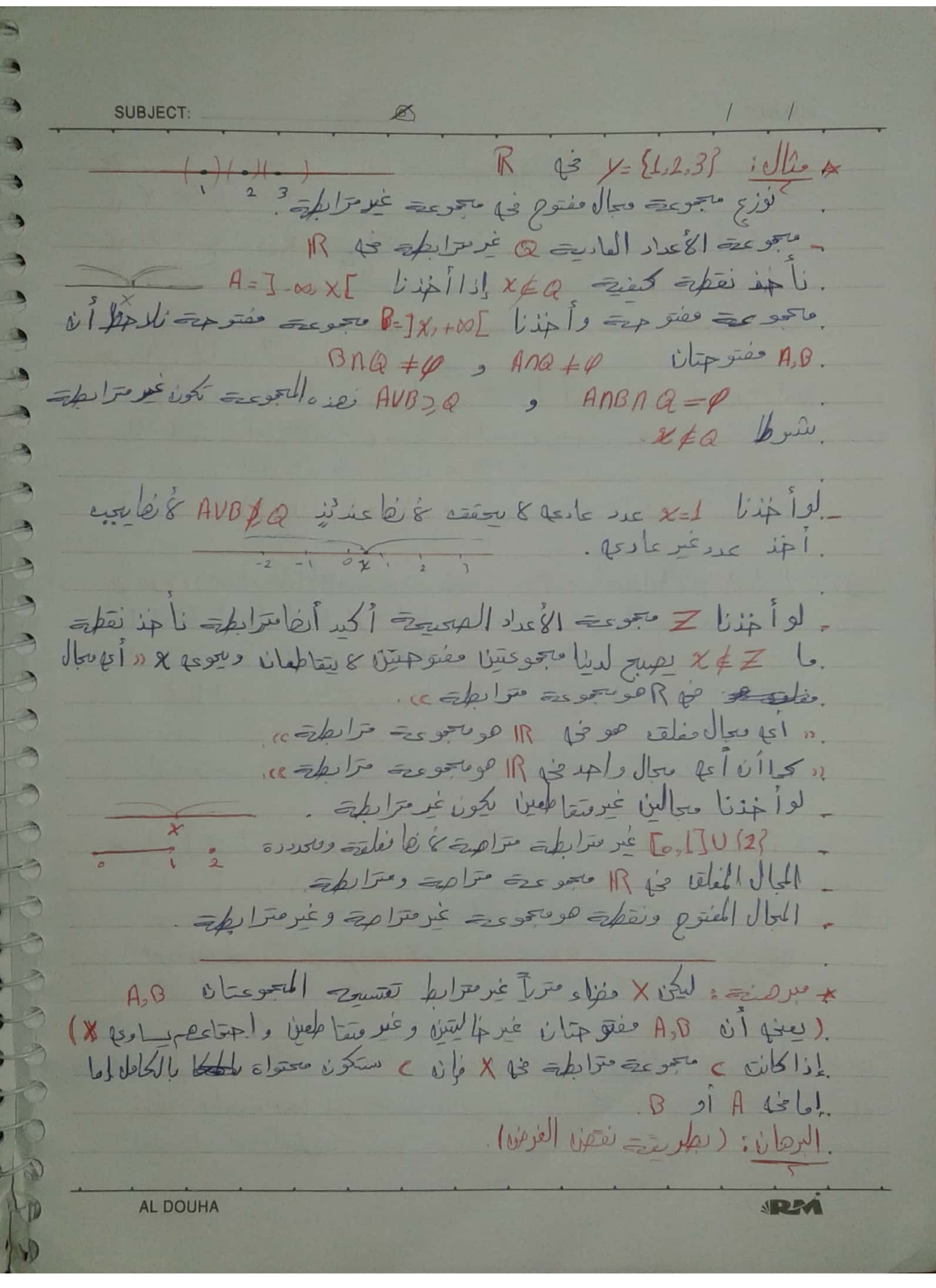
نأخذ $A =]-1, \frac{3}{2}[$ مجموعة مفتوحة و $B =]\frac{3}{2}, 3[$ مجموعة مفتوحة

$A \cap Y \neq \varphi$ ، $B \cap Y \neq \varphi$ وهذا يؤدي أن المجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين ~~غير مترابطتين~~ غير مترابطتين.

$A \cap B \cap Y = \varphi$

$A \cup B \supseteq Y$

★ ملاحظة: المجموعة الخالية تعتبر مترابطة وكذلك المجموعة المؤلفة من نقطة واحدة بينما أي مجموعة منتهية فيها أكثر من نقطة واحدة في الفضاء المتري هي غير مترابطة.



SUBJECT: / /

★ **مثال:** $Y=\{1,2,3\}$ في $\mathbb{R}$

نوزع مجموعة مجال مفتوح في مجموعة غير مترابطة.

- مجموعة الأعداد العادية Q غير مترابطة في $\mathbb{R}$

نأخذ نقطة كيفية $x \notin Q$ إذا أخذنا $A=]-\infty,x[$

مجموعة مفتوحة وأخذنا $B=]x,+\infty[$ مجموعة مفتوحة نلاحظ أن

A,B مفتوحتان $A\cap Q\neq\emptyset$ و $B\cap Q\neq\emptyset$

$A\cap B\cap Q=\emptyset$ و $A\cup B\supseteq Q$ نهذه المجموعة تكون غير مترابطة

بشرط $x\notin Q$.

- لو أخذنا $x=1$ عدد عادي لا يحقق لأنها عندئذ $A\cup B\not\supseteq Q$ لأنها يجب

أخذ عدد غير عادي.

- لو أخذنا Z مجموعة الأعداد الصحيحة أكيد أنها مترابطة نأخذ نقطة

ما $x\notin Z$ يصبح لدينا مجموعتين مفتوحتين لا يتقاطعان ويحوي x «أي مجال

مغلق في R هو مجموعة مترابطة».

«أي مجال مغلق هو في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة».

«كما أن أي مجال واحد في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة».

- لو أخذنا مجالين غير متقاطعين يكون غير مترابطة.

- $[0,1]\cup\{2\}$ غير مترابطة متراصة لأنها مغلقة ومحدودة

- المجال المغلق في $\mathbb{R}$ مجموعة متراصة ومترابطة

- المجال المفتوح ونقطة هو مجموعة غير متراصة وغير مترابطة.

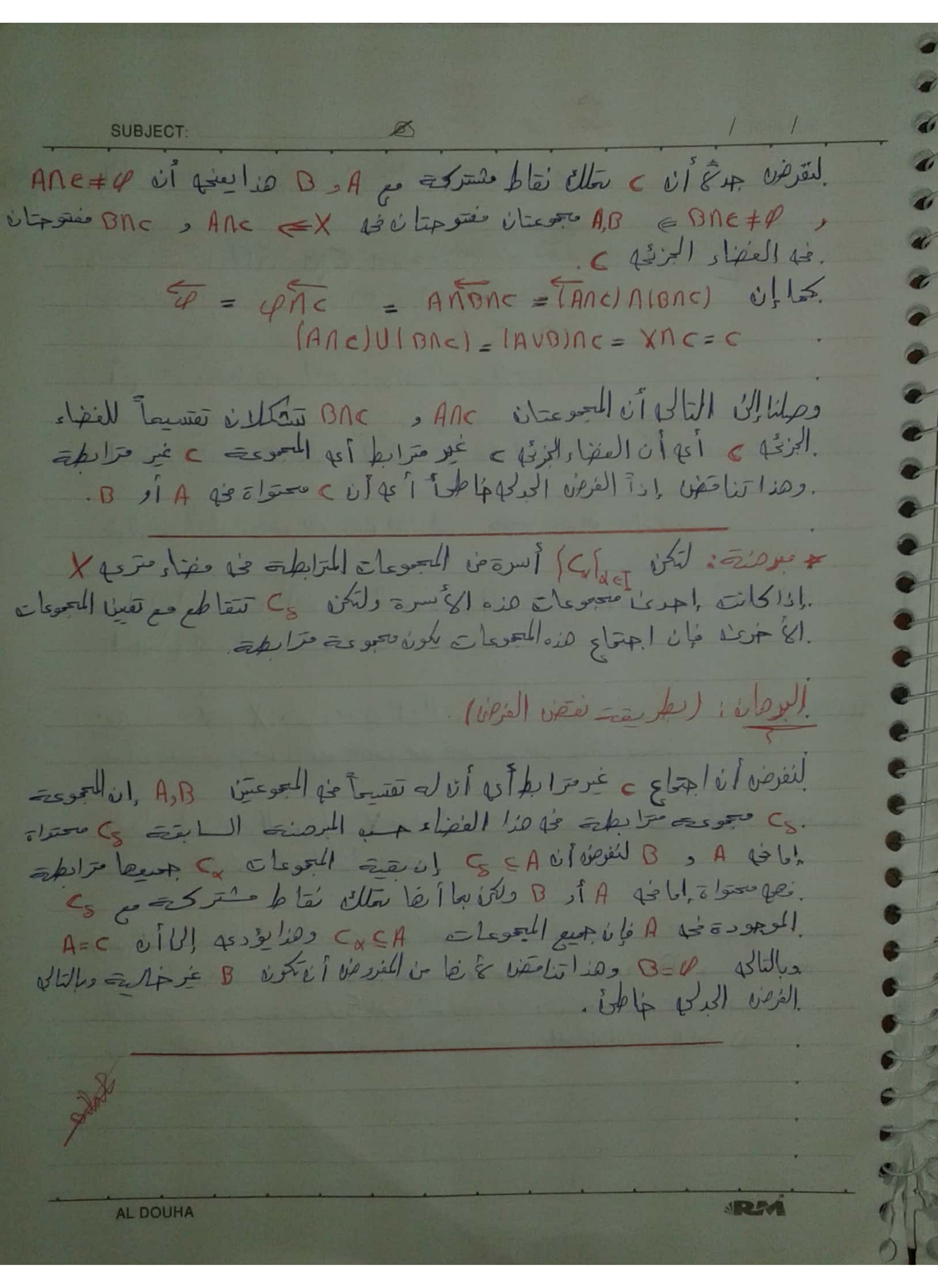
★ **مبرهنة:** ليكن X فضاء مترياً غير مترابط تقسيمه المجموعتان A,B

(يعني أن A,B مفتوحتان غير خاليتين وغير متقاطعين واجتماعهم يساوي X)

إذا كانت C مجموعة مترابطة في X فإن C ستكون محتواة بالكامل إما

إما في A أو B.

البرهان: (بطريقة نقض الفرض).



لنفرض جدلاً أن C تملك نقاط مشتركة مع A و B هذا يعني أن $A\cap C\neq\phi$ و $B\cap C\neq\phi$ ⟸ A,B مجموعتان مفتوحتان في X ⟸ $A\cap C$ و $B\cap C$ مفتوحتان في الفضاء الجزئي C.

بما أن $(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C=\phi\cap C=\phi$

$(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C=X\cap C=C$

وصلنا إلى التالي أن المجموعتان $A\cap C$ و $B\cap C$ تشكلان تقسيماً للفضاء الجزئي C أي أن الفضاء الجزئي C غير مترابط أي المجموعة C غير مترابطة وهذا تناقض إذاً الفرض الجدلي خاطئاً أي أن C محتواة في A أو B.

* مبرهنة: لتكن $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من المجموعات المترابطة في فضاء متري X. إذا كانت إحدى مجموعات هذه الأسرة ولتكن C_δ تتقاطع مع بقية المجموعات الأخرى فإن اجتماع هذه المجموعات يكون مجموعة مترابطة.

البرهان: (الطريقة نقض الفرض)

لنفرض أن اجتماع C غير مترابط أي أن له تقسيماً في المجموعتين A,B، إن المجموعة C_δ مجموعة مترابطة في هذا الفضاء حسب المبرهنة السابقة C_δ محتواة إما في A و B لنفرض أن $C_\delta\subseteq A$ إن بقية المجموعات C_α جميعها مترابطة فهي محتواة إما في A أو B ولكن بما أنها تملك نقاط مشتركة مع C_δ الموجودة في A فإن جميع المجموعات $C_\alpha\subseteq A$ وهذا يؤدي إلى أن $A=C$ وبالتالي $B=\phi$ وهذا تناقض مع أحد الفروض أن تكون B غير خالية وبالتالي الفرض الجدلي خاطئ.